Användningen av Newton's metod i beviset för Inversa funktionssatsen.

Mikael Forsberg

28 september 2007

Sammanfattning

I inversa funktionssatsens bevis i Rudin dyker en funktion

$$\varphi(x) = x + A^{-1}(y - f(x)) \tag{1}$$

upp från ingenstans. Målet med detta dokument är att visa att det finns mycket goda skäl att plocka fram precis denna funktion. Nyckeln till det hela är Newton metod för att finna nollställen till funktioner.

1 Beskrivning av Newtons metod

Det kan löna sig att börja med repetera Newton i envariabelfallet, beskrivning av denna finns t.ex. i Adams Calculus, och många andra Analys I böcker. Jag lämnar dock detta till läsaren och går direkt på flervariabelfallet.

Vår beskrivning av Newtons metod utgår, för att göra beskrivningen enklare att följa, från ett system av två ekvationer i två variabler:

$$\begin{aligned} f_1(u,v) &= 0 \\ f_2(u,v) &= 0, \end{aligned} \tag{2}$$

i vilket vi antar att funktionerna är tillräckligt deriverbara, osv. Ett sådant system beskriver vi mer konsist som ekvationen $F(x) = 0$, där $F(x) = (f_1(x), f_2(x))$ och $x = (u, v)$.

Idén med Newtons metod startar med att göra en linjär approximation av F, vilket innebär att vi direkt använder definitionen av derivata (t.ex. Rudin ekv (17) på i sektion 9.13, där vi ersatt x med x_0 och h med $x - x_0$) Vi får:

$$F(x) = F(x_0) + F'(x_0)(x - x_0) + r(x - x_0)$$

Om vi nu ignorerar feltermen r och låter a vara lösningen till (2), (x_0 tänker vi oss som en aktuell gissning av lösningen till (2)) så får vi

$$0 = F(a) \approx F(x_0) + F'(x_0)(a - x_0),$$

från vilket vi approximativt kan lösa ut $a - x_0$:

$$a - x_0 \approx -F'(x_0)^{-1}F(x_0) \tag{3}$$

Genom att lösa ut a från detta får vi en ny approximation till a som är bättre än den förra gissningen x_0. Tanken är nu att använda denna nya för att skapa en ännu bättre approximation och så vidare. Det är detta som är Newtons metod:

Newtons metod i flera variabler ::

$$\begin{aligned} x_0 &= \text{startvektor} \\ x_{k+1} &= x_k - F'(x_k)^{-1}F(x_k), \text{ för k=0, 1, 2, \ldots} \end{aligned} \tag{4}$$

2 Newtons metod och inversa funktionssatsen

I inversa funktionssatsen så studerar man ekvationssystem av typen

$$\begin{aligned} f_1(u,v) &= y_1 \\ f_2(u,v) &= y_2, \end{aligned} \tag{5}$$

som kan överföras till ett system av den förra typen genom att subtrahera båda led med det som står i vänster led led: $G(x) = y - F(x) = 0$ där $y = (y_1, y_2)$. Vi har nu att

$$G'(x) = -F'(x)$$

varför (4) i Newtons metod blir

$$x_{k+1} = x_k - G'(x_k)^{-1}G(x_k) = x_k + F'(x_k)^{-1}(y - F(x_k))$$

Nu är vi så nära så att vi bör känna igen ekvation (1): sätt $\varphi(x) = x_{k+1}$ och $x_k = x$ så får vi

$$\varphi(x) = x + F'(x)^{-1}(y - F(x))$$

Den enda skillnaden i Rudins uttryck är att derivatamatrisen beräknas i punkten a, så om vi utför iterationerna så behöver vi endast beräkna inversen till en enda matris medan Newtons metod kräver en matrisinvers i varje iterationssteg.

Motivationen av ett vi kan göra denna förenkling är att derivatan är kontinuerlig och att allting utspelar sig i en liten omgivning till a. Rudins bevis visar att denna iterationsidén faktiskt fungerar eftersom funktionen blir en kontraktion och då ger iterationerna en Cauchyföljd som konvergerar till en godtagbar punkt enligt sats 9.23.

Vår slutsats ::

Jag hoppas att detta lilla dokument ska ha gett tillräcklig motivation till varför Rudin väljer funktionen i ekvation (48) i beviset av inversa funktionssatsen.