Pokerkombinatorik: Antalet händer av de olika slagen

Mikael Forsberg

22 november 2006

Sammanfattning

I denna skrift härleds hur mång pokerhänder det finns av de olika slagen, royal straight flush, fyrtal, kåk, färg, stege, triss, 2 par, par, övriga. Av räkningarna följer det att dessa är alla sorters händer och att kombinatoriken stödjer att detta är den rätta styrkeordningen.

1 Räkningar

Vi börjar med några definitioner. I poker har man en vanlig kortlek med fyra sviter (som också brukar kallas färger) (hjärter, ruter, klöver och spader) om vardera tretton kort 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, Kneckt, Dam, Kung, Ess. För att beskriva korten inför vi begreppet inför vi begreppet valör, dvs kortets värde: Notera att Ess kan räknas både lågt och högt, dvs både som 1 och 14.

$$Ess = 14, Kung = 13, Dam = 12, Kneckt = 11, 10, 9, \dots, 2, 1 = Ess.$$

1.1 Totala antalet pokerhänder

För att räkna ut antalet pokerhänder så behöver vi bara hitta antalet sätt att välja 5 kort av 52. I vilken ordning korten kommer spelar ingen roll för en pokerhand och därför blir antalet pokerhänder

$$\binom{52}{5} = \frac{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48}{5!} = \frac{311875200}{120} = 2598960.$$

1.2 Royal straight flush

Låt oss börja med Royal straight flush som innebär att man har fem kort i rad i samma färg av högsta möjliga valör. Detta betyder att vi har 10, 11, 12, 13, 14 i en och samma färg. Eftersom vi har fyra sviter så finns det alltså endast 4 sådana händer.

1.3 Straight flush

Här har vi fem i rad i en och samma svit. Detta kan vi skriva som att valörerna i handen uppför sig som $x, x+1, x+2, x+3, x+4$ där x får ha valören 1 till 10, om vi räknar med ovanstående Royal straight flush. Om vi inte räknar med denna har x endast valörerna $1, \ldots, 9$ för varje svit och således har alltså 36 stycken straight flush.

1.4 Fyrtal

I en hand med fyrtal har vi fyra kort i en valör och ett godtyckligt femte kort. Eftersom det finns 13 valörer så finns det 13 möjligheter att välja valör. För det femte kortet så får vi välja vilket som helst av de återstående 48 korten och vi har alltså $13 \cdot 48 = 624$ olika händer med fyrtal.

1.5 Kåk

En kåk är en hand med tre kort i en valör och två kort i en annan valör. Vi ska alltså först välja ut två valörer. Här är ordningen viktig eftersom den ena valören ska ge triss och den andra ska ge par. Vi har 13 möjligheter att välja trissets valör och då får vi 12 möjligheter för parets valör. För trisset så finns det $\binom{4}{3} = 4$ möjligheter att välja tre kort av de 4 korten av samma valör. För paret finns det $\binom{4}{2} = 6$ möljligheter att välja två kort av fyra. Totalt får vi $13 \cdot 12 \cdot 4 \cdot 6 = 3744$ händer med kåk.

1.6 Färg

En hand med färg är en hand där alla kort tillhör samma svit (eller färg). Vi har $\binom{13}{5} = 1287$ möjligheter att välj 5 kort av 13 i en svit. Av dessa så är 10 stycken stegar (straight flush +royal straight flush) och vi får således $1287 - 10 = 1277$ stycken händer med färg valda från en svit. Eftersom vi har fyra sviter så får vi totalt $1277 \cdot 4 = 5108$ händer med färg.

1.7 Stege

Liksom i fallet i sektion 1.3 så har vi att händerna uppför sig som

$$x, x+1, x+2, x+3, x+4, \quad x \in \mathbb{Z}, \quad 1 \leq x \leq 10.$$

Nu har vi emellertid friheten att välja svit fritt för varje kort och detta ger oss 4 möjligheter för varje kort. Totalt blir det 4^5 att välja de fem kortens färger. Men då har vi även räknat in de fall som är straigt flush+royal straight flush; vi har räknat 40 stycken för många. Totala antalet stegar blir $10 \cdot 4^5 - 40 = 10240 - 40 = 10200$

1.8 Triss

En hand med triss är en hand där vi har tre kort av samman valör och de övriga korten har två andra och olika valörer.

Uppenbarligen har vi 13 sätt att välja trissets valör. Antalet olika möljiga trisskombinationer för denna valör är $\binom{4}{3} = 4$. För de övriga korten ska vi välja två valörer av de tolv kvarvarande valörerna. Detta blir $\binom{12}{2} = 66$ möjligheter. De två sista korten ska också ha en av fyra färger så vi får $4^2 = 16$ möjligheter att välja färg för dessa sista kort. Totalt blir det $13 \cdot 66 \cdot 4^3 = 54912$ händer med triss.

1.9 2-par

För en hand med 2-par så finns det $\binom{13}{2} = 78$ möjliheter att välja valörerna för paren. (Notera skillnaden från Kåk-fallet där ordningen var viktig eftersom vi kan skilja trisset från paret; i detta fall kan vi inte skilja de två paren åt och då måste vi göra en division med antalet permutation av de två paren.) För varje av dessa valörval så finns det $\binom{4}{2} = 6$ möljligheter att välja två kort av fyra. Det femte och sista kortet får väljas fritt blande de övriga 44 korten. Antalet händer med två par blir

$$78 \cdot 6^2 \cdot 44 = 123552$$

1.10 1-par

För en hand med ett par så finns det 13 möjligheter att välja parets valör. Paret bildas nu från de fyra kort som har denna valör och detta ger som tidigare $\binom{4}{2} = 6$ möljligheter. Hur ska vi nu välja de tre sista korten? De tre sista korten måste ha olika valörer eftersom vi annars kan få två-par eller kåk. Valet av de sista tre kortens valörer blir $\binom{12}{3} = 220$. För vardera av de tre korten så kan vi välja svit fritt och har således 4 val för vardera kortet. Totalt får vi nu

$$13 \cdot 6 \cdot 220 \cdot 4^3 = 1098240$$

händer med 1 par.

1.11 Högt kort = övriga möjliga händer

Dessa händer är alla händer som inte räknats med i ovanstående Antalet högt kort händer blir därför

$$\begin{aligned} 2598960 - (1098240 + 123552 + 54912 + 10200 + 5108 + 3744 + 624 + 40) = \\ = 2598960 - 1296420 = 1302540 \end{aligned}$$

Vi kan även räkna ut antal högt-kort händer på ett annat sätt: För de 5 korten så kan vi börja med att välja 5 valörer av 13 möjliga, vilket kan ske på $\binom{13}{5} = 1287$ olika sätt. Av dessa är 10 stycken stegar och vi måste därför dra bort dessa val; vi får $1287 - 10 = 1277$ stegfria val. Varje kort ska nu få en valfri svit tilldelad och detta ger $4^5 = 1024$ möjligheter. Men av dessa 1024 så finns det 4 stycken som där alla kort har samma färg. När vi sammanställer detta får vi att antalet högt-kort händer blir:

$$1277 \cdot 1020 = 1302540$$

högt-kort händer

2 Sammanställning

Vi sammanställer alla möjligheter, som vi beräknade i ovan, i följande tabell; (Notera att sannolikhetheten definieras som = antalet gynnsamma händer divideraat med totala antalet händer)

Typ av hand	**Rang**	**Antal händer**	**Sannolikhet**
Royal straight flush	1	4	$1.5392 \cdot 10^{-6}$
Straight flush	2	36	$13.852 \cdot 10^{-6}$
4-tal	3	624	$240.1 \cdot 10^{-6}$
Kåk	4	3744	0.0014406
Färg	5	5108	0.0019654
Stege	6	10200	0.0039246
Triss	7	54912	0.0211285
Två-par	8	123 552	0.047539
1-par	9	1098240	0.422569
högt-kort	10	1302540	0.5011774
Totala antalet händer	-	2598960	1

Tabell 1: Sammanställning av antalet pokerhänder av olika typ, deras rang och sannolikhet.